

El algoritmo de Karmarkar

por Virginia N. Vera de Serio

Investigadora a nivel de Profesora Titular en Análisis Matemático aplicado a la Economía., en el Departamento de Disciplinas Matemáticas de la Facultad de Ciencias Económicas de la U. N. de Cuyo.

N. Karmarkar presentó en 1984, un nuevo algoritmo de tiempo polinomial para resolver problemas de programación lineal. Esta nueva técnica pronto se convirtió en nota de tapa de noticias. El New York Times y la revista Times se refirieron elogiosamente a este método. Este artículo contiene algunas notas sobre dicho algoritmo.

1. Definición del problema

La forma estándar de un problema de programación lineal es:

$$(1.1) \left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } c^t x \\ \text{sujeto a } Ax \geq b, x \geq 0 \end{array} \right.$$

donde c y x son vectores de \mathbb{R}^n , A es una matriz de orden $m \times n$ y b es un vector en \mathbb{R}^m . La función objetivo es $c^t x$ y las restricciones son:

$$Ax \geq b \quad \text{y} \quad x \geq 0.$$

El correspondiente problema dual es:

$$(1.2) \left\{ \begin{array}{l} \text{maximizar } b^t y \\ \text{sujeto a } A^t y \leq c, y \geq 0 \end{array} \right.$$

Las soluciones de estos problemas están relacionadas: si es posible hallar una solución, entonces $b^t y = c^t x$.

El problema (1.1), por medio de variables de holgura, puede escribirse de la siguiente forma:

$$(1.3) \begin{cases} \text{minimizar } c^t x \\ \text{sujeto a } Ax = b, x \geq 0 \end{cases}$$

El algoritmo de Karmarkar no resuelve los problemas (1.1) a (1.3), sino el siguiente problema, conocido como la forma canónica:

$$(1.4) \begin{cases} \text{minimizar } c^t x \\ \text{sujeto a } x \in \Omega \cap \Delta \end{cases}$$

donde $c, x \in \mathbb{R}^n$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} \quad \text{es un subespacio de } \mathbb{R}^n$$

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1\} \text{ es el simplex (n-1) dimensional de } \mathbb{R}^n$$

Además se tienen tres suposiciones:

- El valor mínimo de la función objetivo es cero.
- El centro del simplex, $a_0 = 1/n (1, 1, \dots, 1)$ es un punto factible, i.e., $a_0 \in \Omega \cap \Delta$.
- El problema se considerará resuelto cuando se encuentre un punto factible x tal que:

$$\frac{c^t x}{c^t a_0} \leq 2^{-q},$$

para algún parámetro de terminación prefijada $q > 0$.

En primer lugar se analizará la solución de Karmarkar del problema (1.4), con las suposiciones (a) - (c). Luego se mostrará cómo transformar el problema (1.3) a la forma canónica y cómo tratar las condiciones (a) y (b).

Obsérvese que la condición (c) es inherente a cualquier cálculo aproximado.

2. Idea General de Karmarkar

Como el centro del simplex, a_0 , no satisface la condición (c), no se puede admitir como solución, luego es necesario hallar otro punto factible para el cual la función objetivo tenga un valor menor. Este algoritmo se basa en la siguiente idea:

1. Inscribir una esfera S en Δ con centro a_0 .
2. $\Omega \cap S$ es otra esfera, con centro a_0 , de dimensión inferior.
3. El problema de minimización de la función objetivo sobre $\Omega \cap S$ es ahora trivial.

El siguiente gráfico ayudará a entender la afirmación del punto 3:

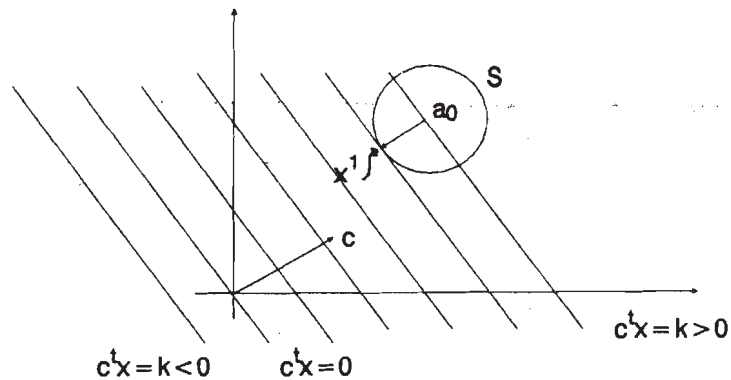


Figura 1

El punto $x^1 = a_0 - \mu c$, donde μ es un escalar positivo, da el valor mínimo de $c^t x$ sobre la esfera S con centro a_0 . (Se puede dar una demostración analítica de esta afirmación por medio del uso de multiplicadores de Lagrange). Ahora bien, en el problema en forma canónica (1.4), se debe minimizar la función objetivo sobre $\Omega \cap \Delta$, quien se encuentra en una variedad lineal $(n-1)$ dimensional, mientras que $c \in \mathbb{R}^n$, luego es necesario proyectarlo ortogonalmente sobre $\Omega \cap \Delta$. La proyección c_p apunta en la dirección opuesta a la deseada.

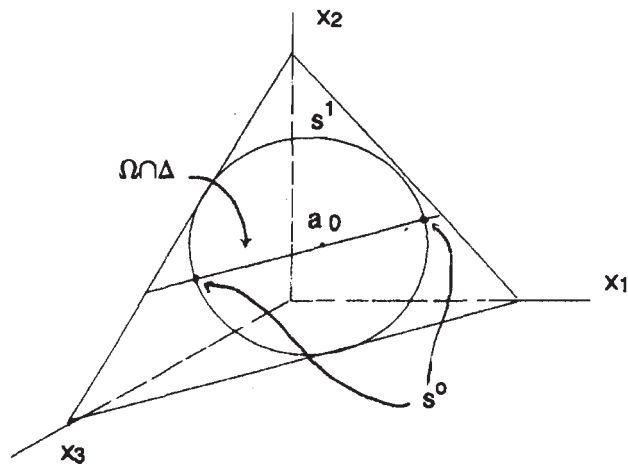


Figura 2

Se debe hacer notar que Karmarkar no utiliza la esfera inscrita, es decir que no se mueve tan lejos como es posible, sino que utiliza una esfera menor, de radio αr , con $0 < \alpha < 1$. $r = 1/\sqrt{n(n-1)}$ es el radio de la máxima esfera inscrita en el simplex.

3. Proceso general de iteración

3.1. Descripción geométrica

Se toma como punto inicial $x^{(0)} = a_0$ y siguiendo las ideas expresadas en el punto 2 se halla un nuevo punto $x^{(1)}$. ¿Cómo encontrar $x^{(k+1)}$ a partir de $x^{(k)}$?

. Aplicar una transformación proyectiva del simplex Δ en sí mismo que fije los vértices y lleve $x^{(k)}$ al centro a_0 .

. Seguir el método de la etapa inicial en el simplex transformado para hallar un nuevo mejor punto y aplicar la transformación inversa a este punto para determinar $x^{(k+1)}$.

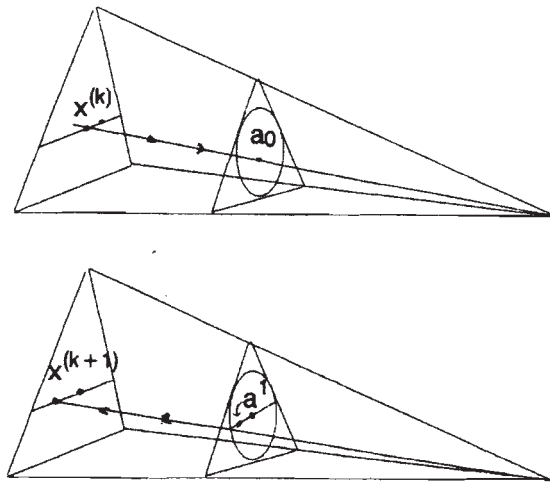


Figura 3

Obsérvese que como en cada etapa se vuelve a la región inicial, los errores de redondeo no se acumulan.

3.2. Descripción algebraica

* Transformación proyectiva: Es necesaria una transformación proyectiva $T: \Delta \rightarrow \Delta$, que haga corresponder a un punto interior a de Δ el centro a_0 . Si $a = (a_1, \dots, a_n)$ y $D = \text{diag} \{a_1, \dots, a_n\}$, es la matriz diagonal con valores en la diagonal a_1, \dots, a_n , entonces $T = T(a, a_0)$ está dada por:

$$T(x) = \frac{D^{-1}x}{e^t D^{-1}x}$$

donde $e = (1, 1, \dots, 1)^t$. Es decir que las nuevas coordenadas, x_i , son:

$$x_i = \frac{x_i / a_i}{\sum_j x_j / a_j}, \quad i = 1, \dots, n$$

La correspondiente transformación inversa está definida por:

$$T^{-1}(x') = \frac{Dx'}{e^t Dx'}$$

de donde:

$$x_i = \frac{Dx'}{\sum_j a_j x_j}, \quad i = 1, \dots, n$$

Ω' indicará el espacio afín Ω transformado, o sea $\Omega' = T(\Omega)$.

Nótese que:

$$\Omega' = \{x \in \mathbb{R}^n : ADx = 0\}$$

Sea $\Omega'' = \Omega' \cap \Delta$. Si $B = \begin{bmatrix} AD \\ e^t \end{bmatrix}$, entonces $\Omega'' = u + \ker B$, para cualquier $u \in \Omega''$.

* Función potencial: Karmarkar define una función potencial f por:

$$f(x) = \sum_i \log(c^t x / x_i) = n \log c^t x - \sum_i \log x_i$$

Se prueba que esta función potencial disminuye en una cantidad positiva δ en cada etapa. El valor de δ depende de α , por ejemplo, si $\alpha = 1/4$, entonces $\delta \geq 1/8$. Si no se observa disminución, $f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) - \delta$, entonces se detiene y concluye que el mínimo valor de la función objetivo es estrictamente positivo. Si la forma canónica del problema se ha obtenido por una transformación de un problema estándar de programación lineal, este caso corresponde a un problema no acotado o no factible.

Karmarkar utiliza esta función potencial porque las transformaciones proyectivas no preservan funciones lineales como la función objetivo del problema. Sin embargo éstas preservan cocientes de funciones lineales. El principal resultado de Karmarkar es asociar esta función potencial con la función objetivo y la prueba de que esta función potencial es efectivamente reducida en cada etapa, así como que esta reducción es equivalente a una reducción del cociente $c^t x / c^t a_0$. f' indicará la correspondiente función potencial transformada, definida por:

$$f'(x) = f'(T(x))$$

Luego:

$$f'(y) = \sum_j \log(c'^t y / y_j) - \sum_j \log a_j$$

donde: $c' = Dc$.

Se trata de minimizar f' sobre $\Omega' \cap \overline{B}(a_0, \alpha r)$. Primero se prueba (Teorema 3) la existencia de un punto que produce una reducción constante en f' y luego se muestra que esta minimización se puede aproximar por minimización de la función lineal $c^t x$ (Teorema 4).

3.3. Descripción del algoritmo

* Etapa 0 : Inicializar $x(0) = a_0$

* Etapa (K + 1) : Computar $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)})$

1. Sea $D = \text{diag} \{x^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\}$ y $B = \begin{bmatrix} AD \\ e^t \end{bmatrix}$

2. Proyección ortogonal de $c' = Dc$ en el espacio nulo de B

$$c_p = (I - B^t (BB^t)^{-1} B) Dc$$

3. Normalizar c_p : $\hat{c} = \frac{c_p}{|c_p|}$

4. $b' = a_0 - \alpha r \hat{c}$, donde

$$r = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$$

$0 < \alpha < 1$ (puede ser $\alpha = 1/4$)

5. Transformación proyectiva inversa aplicada a b'

$$x^{(k+1)} = \frac{Db'}{c^t Db'}$$

4. Teoremas de Karmarkar

4.1. Enunciados

Teorema 1: En $O(n(q + \log n))$ etapas el algoritmo alcanza un punto factible x tal que:

$$\frac{c^t x}{c^t a_0} \leq 2^{-q}$$

Teorema 2: o bien (i) $f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) - \delta$
 ó (ii) el mínimo valor de la función objetivo es estrictamente positivo.
 δ es una constante cuyo valor depende de la elección del parámetro α .

(Una elección particular: Si $\alpha = 1/4$, entonces $\delta \geq 1/8$)

Teorema 3: Existe un punto $b' \in \Omega' \cap \overline{B(a_0, \alpha r)}$ tal que $f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$, donde δ es una constante.

Teorema 4: Sea b' el punto que minimiza $c^t x$ sobre $\Omega' \cap \overline{B(a_0, \alpha r)}$. Entonces $f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$, donde δ es una constante positiva que depende de α . Para $\alpha = 1/4$, se puede tomar $\delta = 1/8$.

Teorema 5: El punto $b' = a_0 - \alpha r c$ (3.3. Etapa $(k+1)$, 4) minimiza $c^t x$ sobre $\Omega' \cap \overline{B(a_0, \alpha r)}$.

4.2. Demostraciones

4.2.1. Demostración del teorema 5:

Claramente $b' \in \Omega' \cap \overline{B(a_0, \alpha r)}$. Sea $z \in \Omega' \cap \overline{B(a_0, \alpha r)}$, entonces:

$$\begin{aligned} b', z \in \Omega' &\Rightarrow B(b' - z) = 0 \\ &\Rightarrow B^t (BB^t)^{-1} B(b' - z) = 0 \\ &\Rightarrow (c' - c_p)^t (b' - z) = 0 \\ &\Rightarrow c^t (b' - z) = c_p^t (b' - z) \\ c_p^t (b' - z) &= |c_p^t| \hat{c}_p^t [a_0 - \alpha r \hat{c}_p - z] \\ &= |c_p| \{ \hat{c}_p^t (a_0 - z) - \alpha r \} \\ \hat{c}^t (a_0 - z) &\leq | \hat{c}_p | |a_0 - z| \leq \alpha r \end{aligned}$$

ya que:

$$z \in \overline{B(a_0, \alpha r)}$$

$$c^t_p (b' - z) \leq 0$$

$$c^t (b' - z) \leq 0$$

$$c^t b' \leq c^t z, \text{ para todo } z \in \Omega'' \cap \overline{B(a_0, \alpha r)}$$

4.2.2. Demostración del teorema 3

Sea S la máxima esfera inscrita en Δ y sea x^* el punto de $\Omega'' \cap S$ donde se alcanza el mínimo de $c^t x$. Claramente $x^* \notin B(a_0, \alpha r)$. Sea b' el punto donde el segmento $a_0 x^*$ interseca la frontera de $B(a_0, \alpha r)$; $b' = (1 - \lambda) a_0 + \lambda x^*$ para algún $\lambda \in (0, 1)$.

Es inmediato que $b' \in \Omega'' \cap \overline{B(a_0, \alpha r)}$.

$$c^t b' = (1 - \lambda) c^t a_0 + \lambda c^t x^* = (1 - \lambda) c^t a_0$$

$$\frac{c^t a_0}{c^t b'} = \frac{1}{1 - \lambda}$$

$$\text{y } b'_j = (1 - \lambda) a_{0j} + \lambda x^*_j$$

luego

$$\begin{aligned} f'(a_0) - f'(b') &= \sum_j \log \frac{c^t a_0 b_j}{c^t b' a_{0j}} = \sum_j \log \frac{(1 - \lambda) a_{0j} + \lambda x^*_j}{(1 - \lambda) a_{0j}} \\ &= \sum_j \log \left[1 + \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{x^*_j}{a_{0j}} \right] \end{aligned}$$

Considerando la siguiente desigualdad: Si $P_i \geq 0$,

$$\text{entonces } \prod_i (1 + P_i) \geq 1 + \sum_i P_i.$$

Por lo tanto $\sum_j \log (1 + P_j) \geq \log (1 + \sum_j P_j)$ y

$$f'(a_0) - f'(b') \geq \log \left[1 + \frac{\lambda}{1-\lambda} \frac{1}{a_{0j}} \sum_j x_j^* \right] = \log \left[1 + \frac{n\lambda}{1-\lambda} \right]$$

$$b' = (1-\lambda)a_0 + \lambda x^*$$

$$b' - a_0 = \lambda(x^* - a_0)$$

$$\alpha r = |b' - a_0| = \lambda|x^* - a_0| \leq \lambda R,$$

donde R es el radio de la menor esfera circunscrita y $R/r = n - 1$

$$\lambda \geq \alpha \frac{r}{R} = \frac{\alpha}{n-1}$$

$$1 + \frac{\lambda n}{1-\lambda} \geq 1 + \frac{n\alpha / (n-1)}{1-\alpha/(n-1)} = 1 + \frac{n\alpha}{n-1-\alpha} \geq 1 + \alpha$$

$$f'(a_0) - f'(b') \geq \log(1 + \alpha),$$

tomando $\delta = \log(1 + \alpha)$, $f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$.

4.2.3. Demostración del teorema 4

Antes de demostrar el teorema 4, se probarán algunos lemas:

Lema 4.1. :

$$\text{Si } |x| \leq B < 1, \text{ entonces } |\log(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2(1-B)}$$

Demostración:

$$\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

luego:

$$|\log(1+x) - x| = \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \right| \leq x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} \leq \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B^n =$$

$$= \frac{x^2}{2(1-B)}$$

Lema 4.2.:

$$\text{Sea } B = \alpha \sqrt{n/(n-1)}. \text{ Para cada } x \in \overline{B(a_0, \alpha r)}, \left| \sum_j \log \frac{x_j}{a_{0j}} \right| \leq \frac{B^2}{2(1-B)}$$

Demostración:

$$a_{0j} = \frac{1}{n} \text{ para } j = 1, \dots, n \text{ y } |x - a_0|^2 \leq \alpha^2 r^2,$$

luego

$$\sum_j \left[\frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right]^2 \leq \frac{\alpha^2 r^2}{(1/n)^2} = \frac{\alpha^2 n^2}{n(n-1)} = B^2$$

$$\left| \frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right| \leq B \quad j = 1, \dots, n$$

$$\left| \log \left[1 + \frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right] - \frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right| \leq \frac{1}{2(1-B)} \left[\frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right]^2$$

por lema 4.1.

$$\sum_j \log \frac{x_j}{a_{0j}} = \sum_j \log \left[1 + \frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right]$$

$$\sum_j \left| \log \frac{x_j}{a_{0j}} - \frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right| \leq \frac{1}{2(1-B)} \sum_j \left[\frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} \right]^2 \leq \frac{B^2}{2(1-B)}$$

pero

$$\sum_j \frac{x_j - a_{0j}}{a_{0j}} = \frac{1}{a_{0j}} \left[\sum_j x_j - \sum_j a_{0j} \right] = \frac{1}{a_{0j}} [1 - 1] = 0,$$

por lo tanto:

$$\left| \sum_j \log \frac{x_j}{a_{oj}} \right| \leq \frac{B^2}{2(1-B)}$$

Demostración de teorema 4

$$\text{Sea } \tilde{f}(x) = n \log (c^t x / c^t a_o)$$

Sea b_m un punto de $\Omega \cap \overline{B(a_o, \alpha r)}$ donde f' alcance su mínimo valor.

$$\begin{aligned} f'(a_o) - f'(b') &= f'(a_o) - f'(b_m) - f'(b') + f'(b_m) \\ &= [f'(a_o) - f'(b_m)] + [f'(b_m) - (f'(a_o) + \tilde{f}(b_m))] - \\ &\quad - [f'(b') - (f'(a_o) + \tilde{f}(b'))] + [\tilde{f}(b_m) - \tilde{f}(b')] \end{aligned}$$

por la demostración del teorema 3:

$$f'(a_o) - f'(b_m) \geq \log(1 + \alpha) \quad (4.1)$$

Para

$$x \in \Omega \cap \overline{B(a_o, \alpha r)},$$

$$\begin{aligned} f'(x) - (f'(a_o) + \tilde{f}(x)) &= \sum_j \log \frac{c^t x}{x_j} - \sum_j \log \frac{c^t a_o}{a_{oj}} - n \log \frac{c^t x}{c^t a_o} \\ &= - \sum_j \log \frac{x_j}{a_{oj}} \end{aligned}$$

luego, por lema 4.2.

$$\left| f'(x) - (f'(a_o) + \tilde{f}(x)) \right| \leq \frac{B^2}{2(1-B)} \quad (4.2)$$

Como \tilde{f} depende monótonamente, en forma creciente, de $c^t x$, \tilde{f} y $c^t x$ alcanzan su valor mínimo sobre $\Omega \cap \overline{B(a_o, \alpha r)}$, en el mismo punto, b' .

Ahora bien, $\tilde{f}(b_m) \geq \tilde{f}(b')$, (4.1) y (4.2) implican

$$f'(a_o) - f'(b') \geq \log(1 + \alpha) \frac{B^2}{1-B} \geq \alpha - \alpha^2/2 - \frac{\alpha^2 n}{(n-1)(1-\alpha\sqrt{n/(n-1)})}$$

$$\text{Definiendo } \delta = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2 n}{(n-1)(1-\alpha\sqrt{n/(n-1)})}$$

se tiene:

$$f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$$

Observación:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = \alpha - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha^2}{1-\alpha}$$

$$2) \text{ Si } \alpha = 1/4, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) \geq 1/8$$

4.2.4. Demostración del teorema 2

Por el teorema 4, $f'(b') \leq f'(a_0) - \delta$.

Aplicando la transformación proyectiva inversa T^{-1} y considerando que:

$$x^{(k)} = T^{-1}(a_0)$$

$$\text{y } x^{(k+1)} = T^{-1}(b')$$

se obtiene:

$$f(x^{(k+1)}) = f(T^{-1}(b')) \leq f'(a_0) - \delta = f(T^{-1}(a_0)) - \delta = f(x^{(k)}) - \delta$$

4.2.5. Demostración del teorema 1

Para cada k se tiene:

$$f(x^{(k+1)}) \leq f(x^{(k)}) - \delta$$

luego,

$$f(x^{(k)}) \leq f(x^{(0)}) - k \delta$$

$$\sum_j \log \left(\frac{c^t x^{(k)}}{x_j^{(k)}} \right) \leq \sum_j \log \left(\frac{c^t a_0}{a_{0j}} \right) - k\delta$$

$$n \log \left(\frac{c^t x^{(k)}}{c^t a_0} \right) \leq \sum_j \log x_j^{(k)} - \sum_j \log a_{0j} - k\delta$$

Pero:

$$x_j^{(k)} \leq 1, \quad a_{0j} = \frac{1}{n}, \quad j = 1, \dots, n, \text{ de donde}$$

$$\log \left(\frac{c^t x^{(k)}}{c^t a_0} \right) \leq \log n - \frac{k}{n} \delta \quad (4.3)$$

El número:

$$m = \frac{n(q + \log n)}{\delta} \quad (4.4)$$

da el número de iteraciones que es necesario calcular en el algoritmo de Kar-markar. Para ver esto, basta con sustituir m por k en (4.3) y observar que se obtiene:

$$\log \left(\frac{c^t x^{(k)}}{c^t a_0} \right) \leq -q$$

lo cual da

$$\frac{c^t x^{(m)}}{c^t a_0} \leq e^{-q} \leq 2^{-q}$$

La definición (4.4) de m dice que $m = 0$ ($n(q + \log n)$).

5. Reducción de un programa lineal a la forma canónica

Sea el problema de programación lineal en su forma estándar:

minimizar $c^t x$

sujeto a $Ax \geq b, x \geq 0$

Hay varios métodos por los cuales este problema se puede convertir a la forma canónica. Se describirán dos de ellos.

5.1. Supóngase que las variables están acotadas, $e^t x \leq k$. Con la introducción de variables de holgura el problema se transforma en:

minimizar $\bar{c}^t \bar{x}$

sujeto a $\bar{A} \bar{x} = b$

$e^t \bar{x} = k$

$x \geq 0$

Por medio de un cambio de escala, $x = \frac{x}{k}$, se tiene:

minimizar $\bar{c}^t \bar{\bar{x}}$

sujeto a $\bar{A} \bar{\bar{x}} = \frac{b}{k}$

$e^t \bar{\bar{x}} = 1$

$\bar{\bar{x}} \geq 0$

de donde se llega a:

minimizar $\bar{c}^t \bar{\bar{x}}$

sujeto a $(\bar{A} - \frac{b}{k} e^t) \bar{\bar{x}} = 0$

$e^t \bar{\bar{x}} = 1$

$\bar{\bar{x}} \geq 0$

Haciendo un cambio de nombres de variables y matrices se obtiene el problema en forma canónica:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } c^t x \\ & \text{sujeto a } Ax = 0 \\ & e^t x = 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Ahora bien, si el mínimo de la función objetivo no es cero, sino un valor conocido M , se puede reemplazar la función objetivo por:

$$c^t x - M = (c - Me)^t x = \tilde{c}^t x,$$

ya que el mínimo de esta función es cero.

5.2. Supóngase que el problema estándar, con la introducción de variables de holgura, se ha escrito en la forma (1.3). Además se supondrá que la condición (a) es satisfecha y que se conoce un punto interior factible a . La reducción a la forma canónica se lleva a cabo a través de una transformación proyectiva del ortante positivo en el simplex. Esta transformación:

$T: P_+ \rightarrow \Delta^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ está dada por: $T(x) = x' \in \mathbb{R}^{n+1}$, donde

$$x'_i = \frac{\frac{x_i}{a_i}}{1 + \sum_j \left(\frac{x_j}{a_j} \right)} \quad i = 1, \dots, n$$

$$x'_{n+1} = 1 - \sum_{i=1}^n x'_i = \frac{1}{1 + \sum_j \left(\frac{x_j}{a_j} \right)}$$

$$P_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$$

$$\Delta^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\}$$

Esta transformación tiene las siguientes propiedades:

1. T aplica P_+ sobre Δ^n y es inyectiva.
2. La transformación inversa está dada por:

$$x_i = \frac{a_i x'_i}{x'_{n+1}}, \quad i = 1, \dots, n$$

3. $T(a) = a_0$, el centro del simplex Δ^n

4. Sean A_i las columnas de la matriz A . Si $\sum_{i=1}^n A_i x_i = b$, entonces

$$\sum_{i=1}^n A_i a_i x'_i - b x'_{n+1} = 0$$

Se definen las columnas A'_i de una matriz A' por

$$A'_i = a_i A_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$A'_{n+1} = -b$$

Entonces

$$A' x' = 0$$

siempre que

$$A x = 0. \quad x' = T(x)$$

También se define $c' \in \mathbb{R}^{n+1}$ por

$$c'_i = a_i c_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$c'_{n+1} = 0$$

Claramente se tiene que $c^t x = 0$ implica $c'^t x' = 0$

El problema transformado es:

$$\text{minimizar } c'^t x'$$

$$\text{sujeto a } A' x' = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} x'_i = 1$$

$$x' \geq 0$$

Como el centro del simplex es un punto factible, se ha obtenido un problema en la forma canónica. Ahora bien, si la suposición (a) no es satisfecha en el problema (1.3), o bien no se conoce un punto factible, o el mínimo de la función objetivo no es conocido, entonces se puede realizar la reducción a la forma canónica combinando los problemas dual y primal:

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax \geq b \\ A^t u \leq c \\ c^t x - b^t u = 0 \\ x \geq 0, u \geq 0 \end{array} \right.$$

Por teoría dual, este problema combinado es factible si y sólo si el problema original tiene una solución óptima finita. Con la introducción de variables de holgura se obtiene:

$$\begin{aligned} Ax - y &= b \\ A^t u + v &= c \\ c^t x - b^t u &= 0 \\ x \geq 0, u \geq 0, y \geq 0, v &\geq 0 \end{aligned}$$

Sean x_0, y_0, u_0, v_0 puntos interiores del ortante positivo y considere el problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \lambda \\ &\text{sujeto a } Ax - y + (b - Ax_0 + y_0) \lambda = b \\ &\quad A^t u + v + (c - A^t u_0) \lambda = c \\ &\quad c^t x - b^t u + (-c^t x_0 + b^t v_0) \lambda = 0 \\ &\quad x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0, \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Note que $x = x_0, y = y_0, u = u_0, v = v_0, \lambda = 1$ es un punto interior factible que se puede tomar como punto inicial. Además el valor mínimo de λ es cero si y sólo si el problema (5.1) es factible.

6. Comentarios finales

La principal dificultad en la aplicación del algoritmo de Karmarkar es la inversión de matrices necesaria en cada etapa para obtener la proyección ortogonal del vector c . Karmarkar describe un algoritmo modificado que le permite utilizar los cálculos efectuados en la k -ésima etapa, en la siguiente etapa ($k + 1$). Esto le permite reducir las operaciones aritméticas de cada etapa de $O(n^3)$ a $O(n^{2.5})$.

Diversos autores han sugerido variantes de este método con el objetivo de mejorar la eficiencia práctica y la simpleza de implementación de este algoritmo. La complejidad total de este algoritmo es $O(n^{3.5} L^2 \log L \log \log L)$, donde L es el número de bits en los datos de entrada y n es el número de variables.

Bibliografía

- GONZAGA, C., *Algoritmos de pontos interiores para programacao linear*, Instituto de Matemática pura y aplicada, Río de Janeiro, 1988.
- GONZAGA, C., *Search directions for interior linear programming methods*, University of California, Berkeley, California, 1987.
- KARMAKAR, N., *A new polynomial-Time algorithm for linear programming*, *Combinatorica* 4 (4) 1984, págs. 373/395.
- ROCKETT, A, STEVENSON, J., *Karmarkar's algorithm*, 146 byte, setiembre 1987.