

El tercero incluido en la contraparadoja de Russell

PEDRO PI CALLEJA

Universidad Nacional de Cuyo, San Juan

Sumario: Objetivando la paradoja clásica de Russell, se hace principalmente la observación, acaso original, de que el caso correlativo al que constituye la paradoja y sobre el que la generalidad de los autores no hacen mención especial, tiene el interés de ser ejemplo de excepción del principio del tercero excluido. (Presentado verbalmente a las reuniones de 1948 del "Centro de Estudios Físicomatemáticos de la Universidad Nacional de Cuyo").

I

La paradoja de Russell¹ sobre conjuntos que puedan o no considerarse como elementos de sí mismos se hace más asequible con la siguiente objetivación de análogo contenido lógico:

Llamemos *biblioteca* al conjunto bien definido de *catálogos* encuadernados que se obtiene agregando a los contenidos en una determinada habitación otro *X* formado en el momento. Entonces tendrá sentido preciso hablar de *todos* los catálogos de esa biblioteca, una vez asegurada la existencia de *X*. Supongamos además que a cada catálogo corresponde biunívocamente un título grabado en sus tapas y apliquemos la siguiente clasificación: a) Si el catálogo reproduce el título impreso en su interior lo llamamos *autocitado*; b) Si el catálogo no reproduce impreso su título en su interior lo llamamos *no autocitado*.

Si llamamos catálogo rojo al que tiene sus tapas de este color, ninguna elucubración lógica sobre predicabilidad impedirá *sea posible*

¹ B. RUSSELL: *The principles of mathematics*. Cambridge, 1903.

considerar formado el catálogo X por uno R en cuyo interior figuren impresos exclusivamente los títulos de *todos* los catálogos rojos de la biblioteca, incluyendo o excluyendo el del mismo $X=R$ según lo formemos o no de tapas rojas.

Sin embargo, en caso parecidamente análogo, se da la paradoja de Russell de *ser imposible* encontrar en la biblioteca o formar el catálogo $X=N$ tal que en su interior figuren impresos exclusivamente los títulos de *todos* los catálogos no autocitados de dicha biblioteca, pues si contienen el título del mismo catálogo N, éste será autocitado y no debe figurar, mientras que si el título no figura en su interior, dicho catálogo N será no autocitado, por lo que su título hubiese debido estar impreso en su interior.

La generalidad de los autores pasa por alto, o acota no da lugar a antinomia alguna, el caso que corresponde en esta objetivación al catálogo de los autocitados. No obstante es interesante examinar el "exceso de fortuna" que origina su consideración en relación al principio del tercero excluido. Este parece exigir que un par de condiciones contradictorias como las de catálogo autocitado o no autocitado deben y pueden atribuirse en alternativa, tanto a todo catálogo de los contenidos en la habitación, como al X que se forme en el momento.

Pues bien, si queremos que $X=A$ sea un catálogo tal que en su interior figuren exclusivamente impresos los títulos de *todos* los catálogos autocitados de la biblioteca, dicho $X=A$ tanto podrá considerarse catálogo autocitado (figurando su título impreso en su interior), como no autocitado (no figurando su título impreso en su interior) y para resolver la cuestión no será decisivo el principio del tercero excluido.

En toda esta objetivación puede observarse cuán errónea es la opinión de muchos autores¹ al considerar la paradoja de Russell propia de los conjuntos *infinitos*. No se trata de finito ni infinito, sino sólo de la idea de totalidad en relación a la de predicabilidad.

Para verlo mejor, *limitemos* nuestra biblioteca a los catálogos existentes "a priori" contenidos en una determinada habitación (dejando de considerar el X que pueda hacer impredicable la biblioteca). Entonces, aun cuando sea posible poner en pila todos los catálogos no autocitados de la biblioteca, el catálogo N antes definido no podrá

¹ V. g.: R. COURANT AND H. ROBBINS: *What is mathematics?* Oxford Un. P. 1941.

existir en la biblioteca, es decir será ejemplo de *conjunto mal definido*. Sin embargo, la posibilidad de encontrar el catálogo R y no el N indica que la antinomia tiene un alcance superior al semántico. Por otra parte, será posible encontrar en la biblioteca tanto un catálogo no autocitado A_n como un catálogo autocitado A_1 , en cuyo interior figuren impresos exclusivamente los títulos de *todos* los catálogos autocitados de la biblioteca; es decir, ambos tendrán el *mismo texto* que contendrá el título de A_1 , pero no el de A_n . Así, para un catálogo ya existente sea el A_1 o el A_n , rige el principio del tercero excluido; sin embargo, este principio *no es constructivo* para formar el conjunto de títulos que constituya el texto anterior. Esta última observación fundamenta la lógica brouweriana o intuicionista en relación al principio del tercero excluido. *La limitación* aplicada a la biblioteca está de acuerdo con la teoría de los tipos lógicos de Russell para solucionar su paradoja dentro de la lógica aristotélica.